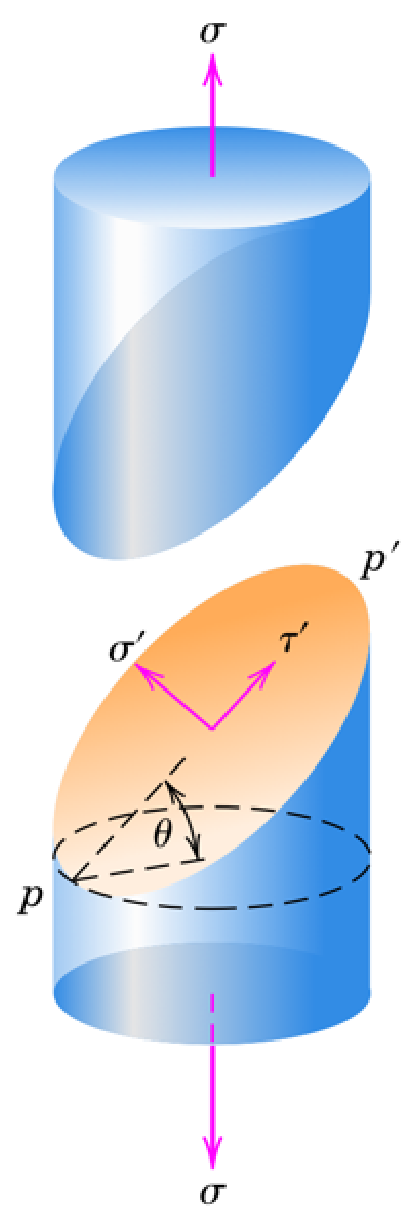
Propriedade Mecânicas dos Sólidos.

★ Vamos desenvolver os tópicos partindo de problemas a serem resolvidos. Assim inserimos aplicabilidade dos conceitos estudados.

★ Procedimento: 1) Um problema é proposto.
2) Antes de resolvê-lo estuda-se os conceitos envolvido com o problema específico
3) Aplica-se os conceitos aprendidos e entendidos a fim de resolver-se o problema proposto.

Conceito de tensão e deformação.

Problema: Usando os princípios da mecânica dos materiais (isto é, as equações de equilíbrio mecânico aplicáveis a um diagrama de corpo livre), desenvolver as Equações abaixo.



Eq. 1) $\sigma' = \sigma\cos^2(\theta) = \sigma\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)$

Eq. 2) $\tau' = \sigma\,\text{sen}(\theta)\cos(\theta) = \sigma\left(\frac{\text{sen}(2\theta)}{2}\right)$

SOLUÇÃO:

"Logicamente", para se resolver um problema, qualquer que seja, é necessário conhecer os conceitos envolvidos. No caso de problemas de física os conceitos são, em geral, representados por símbolos (letras representativas). As equações acima relacionam os conceitos através de uma equação matemática.

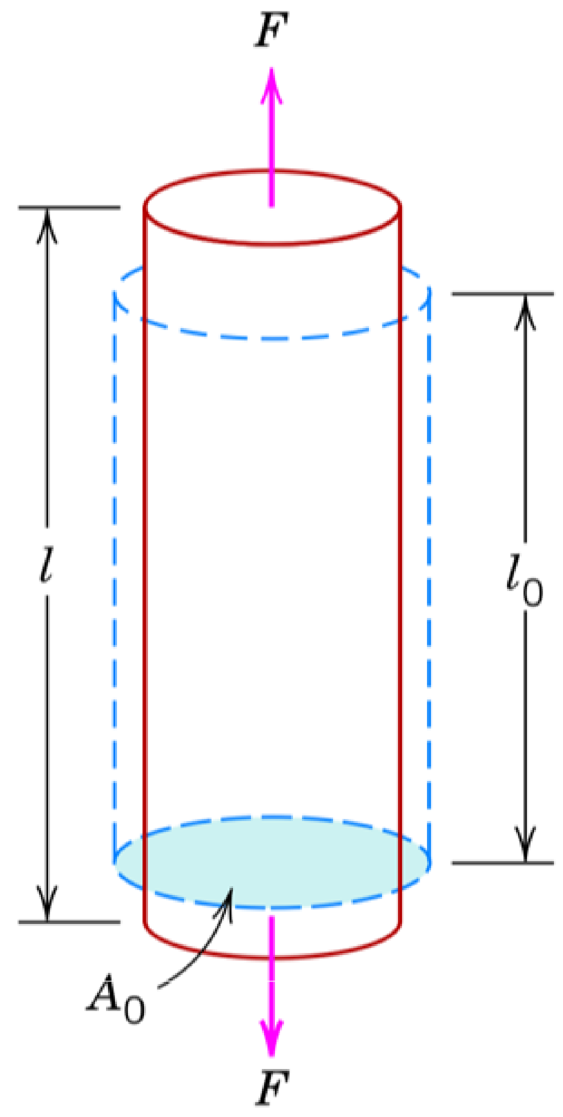
★ Precisamos entender o que significam as "letras" relacionadas.

Significado de: σ e τ.

Obs: σ' e τ' têm o mesmo significado físico de σ e τ. Tratam-se de componentes direcionais.

⇩

σ. Representa a tensão sob a qual um sólido está submetido. Vamos ilustrar este conceito através de um exemplo simétrico (por facilidade).



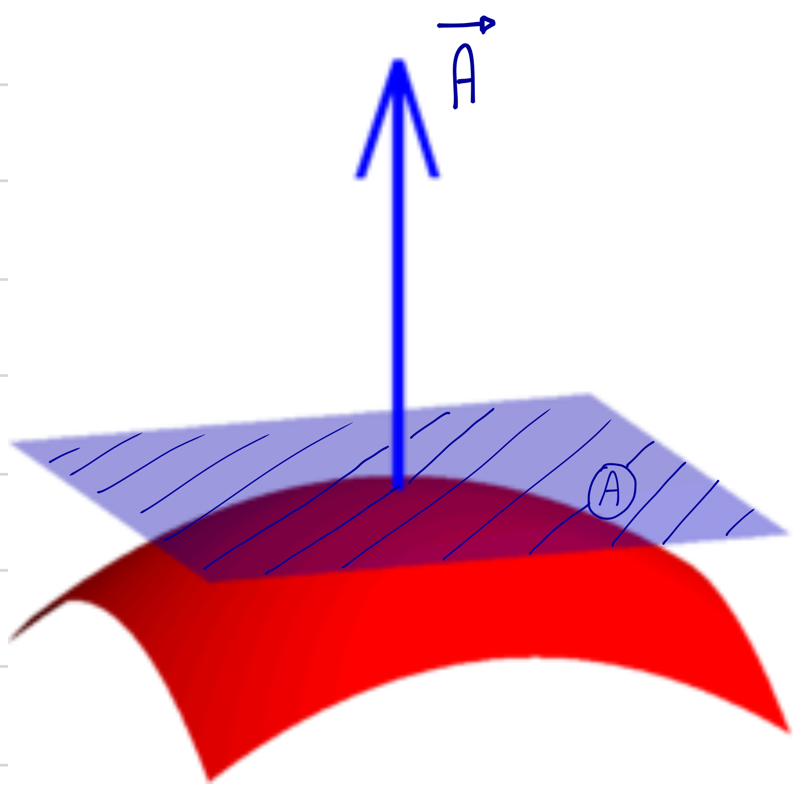
Vamos considerar um sólido cilíndrico (parte tracejada) de área transversal inicial A_0 e comprimento inicial l_0.

Uma força é aplicada perpendicularmente à superfície A_0.
$\Rightarrow$ Considerando um equilíbrio estático (o material não adquire movimento de translação) $\Rightarrow$ A força resultante deve ser nula, ou seja, forças de mesmo módulo e sentidos contrários, como na Fig. ao lado.

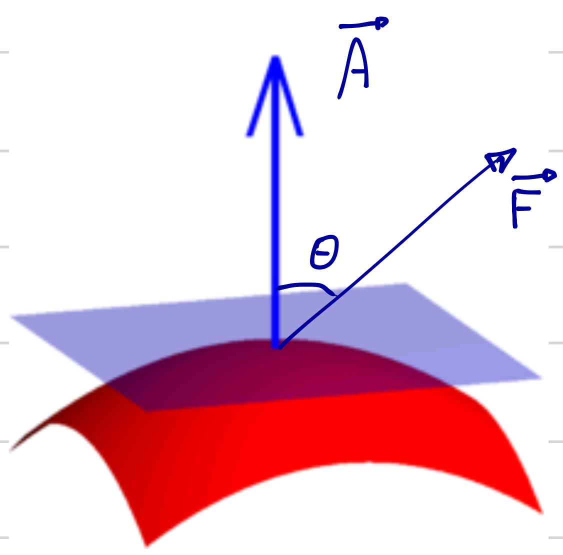
Resulta que o sólido sofre mudança em suas dimensões (Deforma).

- Define-se Tensão σ como sendo a força por unidade de área, para uma força F aplicada paralelamente ao vetor área $\vec{A}$ (equivalentemente, perpendicular à superfície A_0).

Nota: O vetor $\vec{A}$ é definido como um vetor perpendicular à superfície com área $|\vec{A}|$, como ilustrado abaixo.



Portanto, aplicando uma força $\vec{F}$ na forma abaixo



, $\rightarrow$ $\sigma = \dfrac{|\vec{F}|\cos(\theta)}{|\vec{A}|}$, ou abstraindo os símbolos de módulo

$$\sigma = \frac{F\cos(\theta)}{A}.$$

Como trata-se de uma força perpendicular à superfície, é comum escrever-se na forma

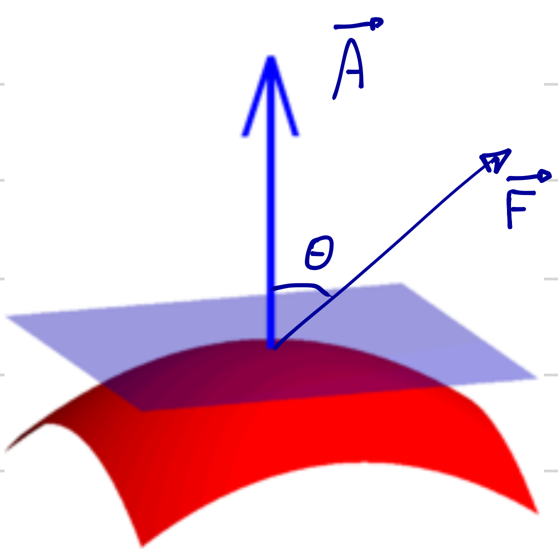
$$\sigma = \frac{F_\perp}{A}, \qquad F_\perp \equiv \text{força perpendicular}$$

* * *

Definição de τ.

Usando o mesmo procedimento (considerando o caso estático); define-se τ como sendo.

* Força por unidade de área; tal que considera-se a componente da força paralela à superfície com área A (ou, equivalentemente, perpendicular ao veto $\vec{A}$), como ilustra-se abaixo.



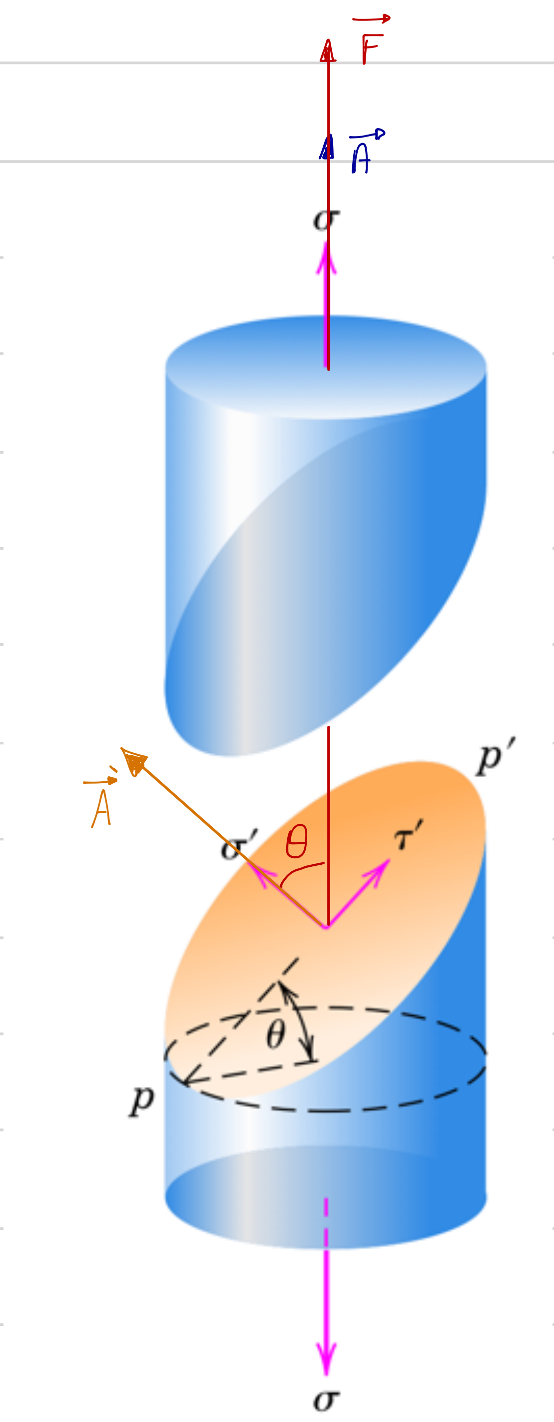
$$\rightarrow \quad \tau = \frac{|\vec{F}|.\,\mathrm{sen}(\theta)}{|\vec{A}|} \quad \text{ou} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{F_{/\!/}}{A}.$$

"Perceba que trata-se de uma força que tende a deslocar as faces em sentidos contrários - como rasgo.

τ é chamado de tensão de cisalhamento".

* * *

* Voltemos ao problema, pois já temos em mãos os conceitos necessários.



$$\Rightarrow \quad \sigma' = \frac{F\cos(\theta)}{A'}$$

Mas $A = A'\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad A' = A/\cos(\theta)$

$$\Rightarrow \quad \sigma' = \frac{F\cos(\theta)}{A/\cos(\theta)} = \frac{F}{A}\cos^2(\theta)$$

Perceba que $\sigma = F/A$

$$\rightarrow \quad \left[\sigma' = \sigma.\cos^2(\theta)\right]$$, ou usando as relações trigonométricas

$\mathrm{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \qquad (1)$

$\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) = \cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta) \qquad (2)$

de (2) $\Rightarrow$ $sen^2(\theta) = cos^2(\theta) - cos(2\theta)$, em (1)

$$cos^2(\theta) + cos^2(\theta) - cos(2\theta) = 1$$

$$cos^2(\theta) = \frac{1 - cos(2\theta)}{2}$$

$$\Rightarrow \left[\sigma' = \sigma \left(\frac{1 - cos(2\theta)}{2} \right) \right].$$ "importante interpretar fisicamente este resultado"

* * *

Para a componente de cisalhamento temos:

$$\tau = \frac{F . sen(\theta)}{A'} = \frac{F sen(\theta)}{A / cos(\theta)} = \frac{F}{A} sen(\theta).cos(\theta).$$

Usando $sen(2\theta) = 2 sen(\theta) cos(\theta)$

$$\Rightarrow \left[\tau' = \frac{\sigma . sen(2\theta)}{2} \right.$$

FIM.

* * * * *

Problema: "Tensão – Deformação".

Um corpo de prova de Alumínio com seção reta retangular de 10 mm x 12,7 m (0,4 pol. x 0,5 pol.) é puxado em tração com uma força de 35,00 N (8000 lb_f), produzindo apenas uma deformação elástica. Calcular a deformação resultante.

* Conceitos a serem entendidos:

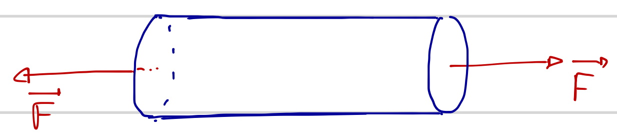
1) Tração
2) Deformação
3) Deformação elástica.
4) Constante de proporcionalidade entre a tensão aplicada e a deformação produzida (característica do material).

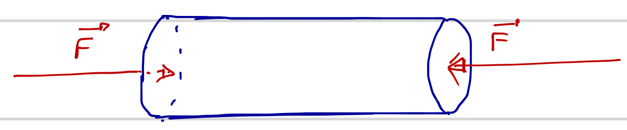
* Tração:

Durante a solução do problema anterior foi definido o conceito de tensão;

$$\sigma = \frac{F_\perp}{A}.$$

Note que $F_\perp$ pode ser aplicada tanto no sentido de afastar as faces contrárias quanto no sentido de aproximá-las.

(a)  Neste caso se diz que o espécime está sob tração.

(b)  Neste caso se diz que está sob compressão

— 11 —

* Deformação.

Todo material sólido apresenta alterações em suas dimensões (mesmo que não seja percebida visualmente - como em muitos casos não é) quando submetido à tensões. Dependendo da aplicação - dependendo dos esforços aos quais o material será submetido - certas característica são desejadas. Pode-se desejar que um material se deforme pouco quando submetido a altas tensões; que deforme bastante e elasticamente em outros casos, etc. Portanto, é importante testar e catalogar as características de diferentes materiais, tal que um engenheiro, por exemplo, possa escolher o material mais apropriado para uma dada aplicação

* Vale frisar que em geral quase todas as propriedades de um material sólido (propriedades magnéticas, elétricas, mecânicas, óticas, etc...) estão correlacionadas, ou seja, variando uma $\Rightarrow$ as outras variam como consequência. Em particular a deformação de um sólido promove alterações em diversas outras propriedades.

* Definição de deformação (ε).

Como as definições visam caracterizar um material pelo seu aspecto estrutural e químico e não por suas características macroscópicas (volume, forma, cor ...), parece plausível definir-se deformação independente do tamanho (Assim como fizemos com σ e $\underline{I}$, definindo-os por unidade de área). Desta forma define-se deformação de tensão (deformação colinear com a força aplicada) de forma percentual (na verdade fracionária) como segue:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0},$$ onde l_0 é o comprimento inicial (antes da ação de uma força) e l é o comprimento final.

"Obviamente", materiais diferentes deformam com diferentes facilidades – alguns são mais rígidos que outros. Desta forma deve existir uma proporcionalidade entre σ e ε para cada material.

Assumindo a rigidez como sendo este liame entre σ e ε; e assumindo uma região de proporcionalidade direta entre σ e ε ⇩

$$\left[\ \sigma = E \cdot \varepsilon\right.$$

A constante de proporcionalidade **E** é denominada módulo de Young ou módulo de elasticidade.

Testes de tensão-deformação são realizados e E é determinado e catalogado para os diferentes materiais. Veja alguns valores abaixo.

	Modulus of Elasticity		cisalhamento: Shear Modulus		
Metal Alloy	***GPa***	***10^6 psi***	***GPa***	***10^6 psi***	***Poisson's Ratio***
Aluminum	69	10	25	3.6	0.33
Brass	97	14	37	5.4	0.34
Copper	110	16	46	6.7	0.34
Magnesium	45	6.5	17	2.5	0.29
Nickel	207	30	76	11.0	0.31
Steel	207	30	83	12.0	0.30
Titanium	107	15.5	45	6.5	0.34
Tungsten	407	59	160	23.2	0.28

http://s3.amazonaws.com/magoo/ABAAAAdmMAH-2.png

Obs: Testes similares são realizados para definir a relação entre τ e a deformação relativa das faces (deslocamento de cisalhamento). Neste caso o teste é do tipo abaixo

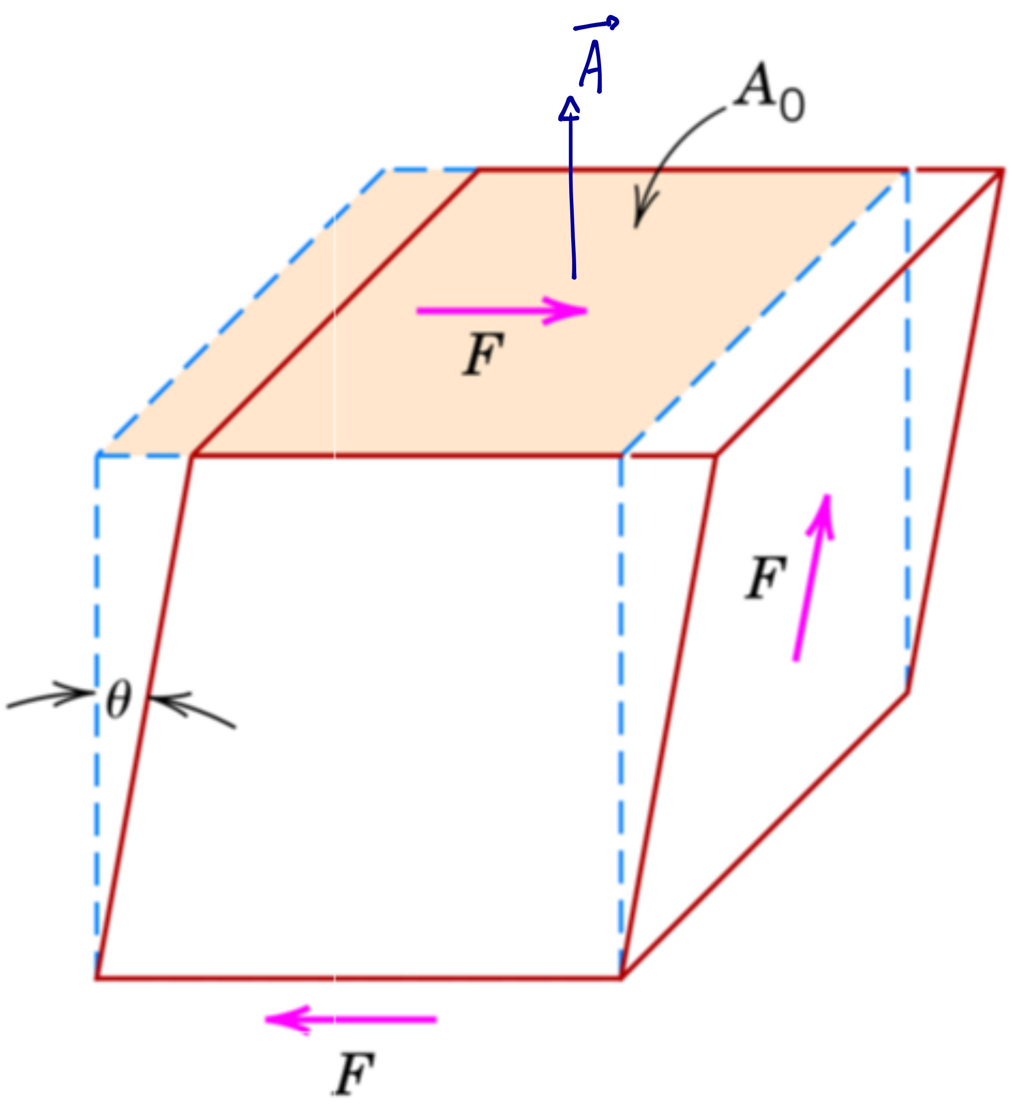


Fig William D Callister, Jr - 12ª Edição.

Neste caso o análogo de ε é definido como

$$\gamma = \tan(\theta).$$

⇒ de forma similar:

$$\gamma \propto \tau \quad ; \quad \tau = G\gamma .$$

G é denominado módulo de cisalhamento.

* Tendo em mãos as informações necessárias, voltemos ao problema.

Um corpo de prova de Alumínio com seção reta retangular de 10 mm × 12,7 mm (0,4 pol. × 0,5 pol.) é puxado em tração com uma força de 35,00 N (8000 lb_f), produzindo apenas uma deformação elástica. Calcular a deformação resultante.

Solução: $\sigma = E.\varepsilon$. A deformação é $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$. σ foi dado → precisamos conhecer $\underline{E}$ do Alumínio. Da tabela →

$$E_{Al} = 69\,GPa \Rightarrow 1\,Pa \equiv 1\,N/m^2 \qquad \text{"Um Pascal"}$$

Dos dados → $\sigma = \frac{F_1}{A} = \frac{35{,}00\,N}{(10 \times 12{,}7) \times 10^{-6}\,m^2} = \frac{35{,}00}{127 \times 10^{-6}}\,Pa$

$$\varepsilon = \frac{\frac{35{,}00}{127} \times \cancel{10^6\,Pa}}{96 \times \cancel{10^6\,Pa}} = \frac{35{,}00}{127 \times 96}$$

$$\underline{\varepsilon = 0{,}00287} \quad \text{ou} \quad 0{,}287\,\%$$

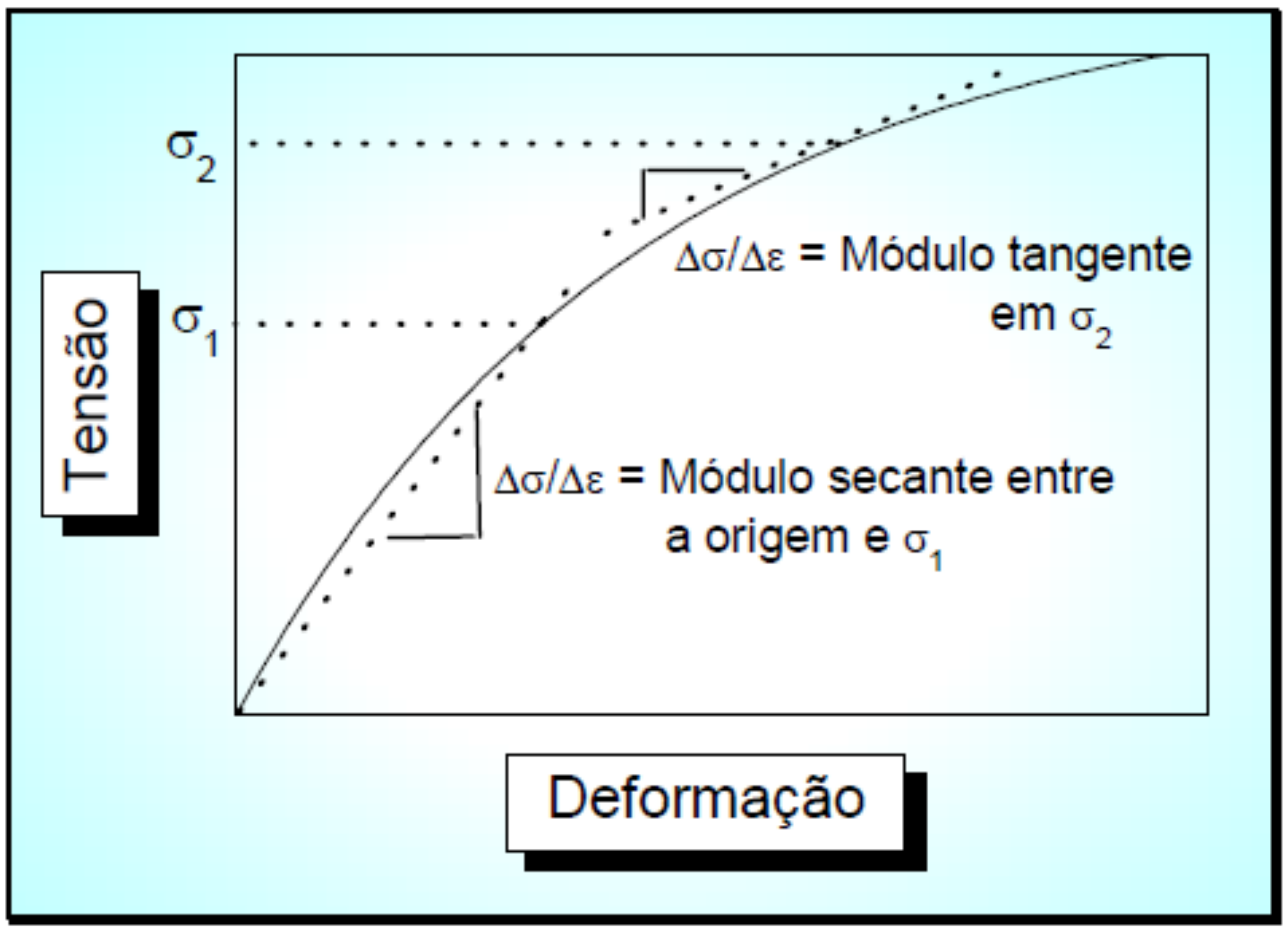
★ *Importante:*

Perceba a semelhança da relação $\underline{\sigma = E\varepsilon}$ com a relação $\underline{F_{externo} = Kx}$, sendo $F_{externo}$ uma força externa aplicada a uma mola com constante elástica $\underline{K}$. As relações são similares, tal que

$$\begin{array}{c} \sigma = E\,\varepsilon \\ \downarrow \quad \downarrow \ \downarrow \\ F_{ext} = K\,x \end{array}$$

Assim como no caso de uma mola, a linearidade só é uma boa aproximação para pequenas deformações - Se diz aproximação de primeira ordem. Não é difícil imaginar-se que com a continuação da deformação de uma mola promove-se alterações em sua rigidez e, consequentemente, mesmas variações na força aplicada não promove deformações iguais (comportamento não linear).

O comportamento mencionado acima está ilustrado no gráfico $\sigma(\varepsilon)$ abaixo.



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d8/Tens%C3%A3o-deforma%C3%A7%C3%A3o_M%C3%A9todo_secante.PNG

Note em diferentes pontos da curva tem-se diferentes relações entre $\Delta\sigma$ e $\Delta\varepsilon$, ou seja, diferentes módulos de elasticidade.

Note também que, diferentemente do que ocorre com a mola, quanto mais se deforma o material mais fácil de produzir uma deformação subsequente *

* PQ?

Antes de respondermos a questão colocada acima vamos introduzir o conceito de elasticidade (comportamento elástico e não elástico).

- Comportamento elástico:

No dia-dia é comum torcer, apertar, pressionar materiais. Em muitos casos o material submetido a uma tensão volta à sua forma inicial após a retirada da tensão, Ex: Aperto de uma campainha, sentar-se e levantar-se sobre uma cadeira, etc. Em outros casos o material não retoma sua forma inicial, Ex: Morder um pão, batida "forte" entre automóveis, etc.. Desta forma define-se:

Comportamento elástico: O material retoma sua forma após ser submetido a uma tensão.

Comportamento anelástico: O material não retoma à sua forma inicial.

* * *

*** Problema:** Explique porque $\Delta\varepsilon$ aumenta para mesmos $\Delta\sigma$ aplicados em um material sólido.

Obs: Como pensar em $\Delta\sigma$. Imaginar que uma força (ou tensão) já foi aplicada e produziu $\underline{\varepsilon}$
$\Rightarrow$ o sistema se encontra em equilíbrio estático. Desta forma, novas deformações $\Delta\varepsilon$ são função de variações na tensão $\Delta\sigma$, tal que:

$$\Delta\sigma = E\,\Delta\varepsilon .$$

O problema diz que mesmos $\Delta\sigma$ fazem resultar em $\Delta\varepsilon$ maiores quanto maior for a tensão aplicada $\underline{\sigma}$.

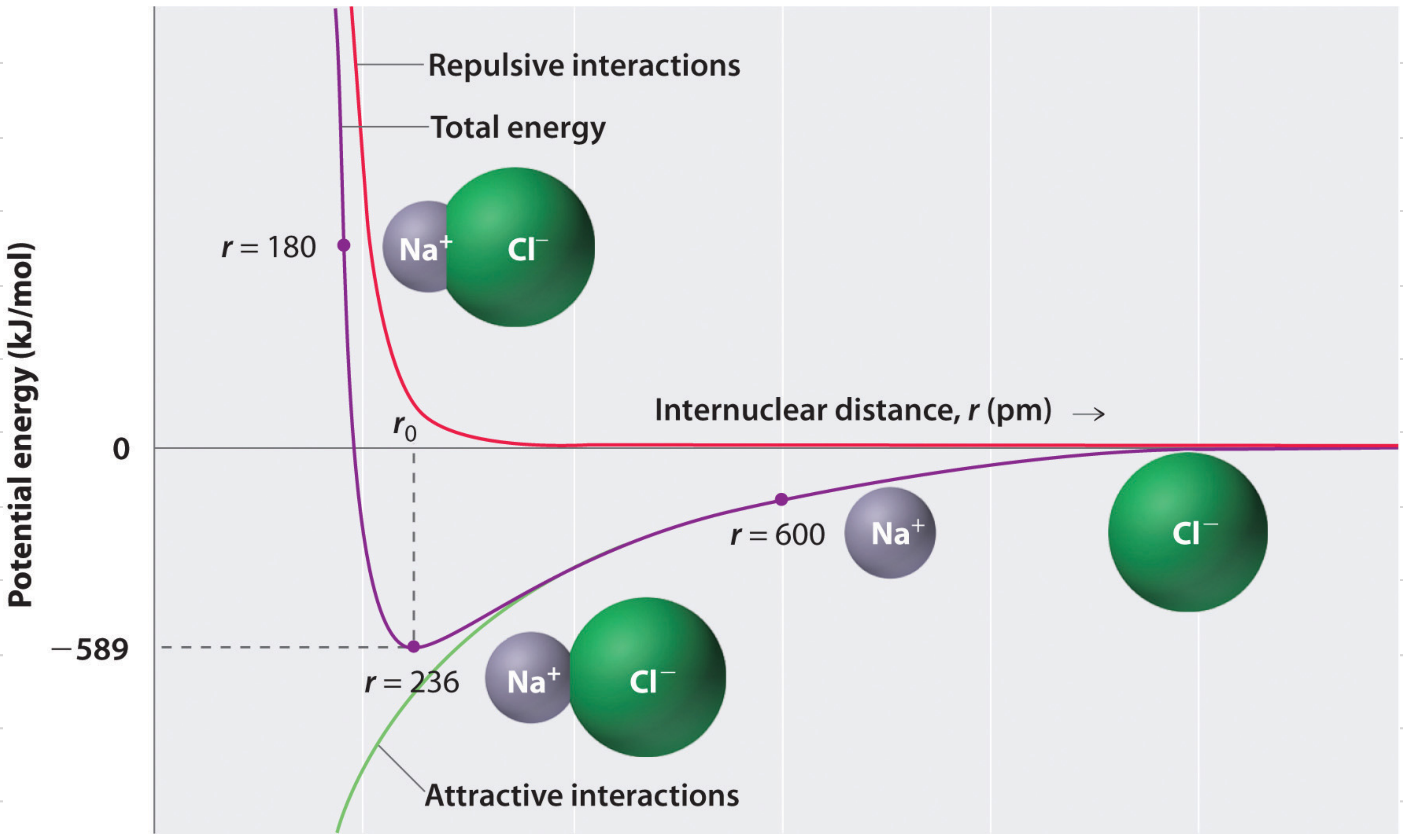
Se isso é verdade – e é – então $\underline{E}$ depende de $\underline{\varepsilon}$, ou seja:

$$\Delta\sigma = E(\varepsilon)\Delta\varepsilon .$$

Obs: Comportamento não linear não tem qualquer relação com comportamento não elástico – são "coisas" independentes.

* Resposta do problema, qualitativo, colocado.

Vamos responder esta questão através da análise energia de ligação interatômica, representada no gráfico genérico abaixo.



http://images.flatworldknowledge.com/averillfwk/averillfwk-fig08_001.jpg

A Fig. acima representa a energia potencial de ligação interatômica, composta por um termo atrativo (componente negativa) e um termo repulsivo (componente positiva da energia). A energia potencial líquida é a soma das componentes.

Revisão fundamental: Em geral, para interações interatômicas - também gravitacionais - define-se o zero da energia potencial no infinito, ou seja, define-se que o potencial é zero quando os interagentes estão separados por uma distância $r = \infty$. Assim, ao aproximar-se interagentes que se repelem a energia só pode aumentar; ao aproximar-se interagentes que se atraem a energia só pode diminuir.

⇒ Ao aproximarmos dois átomos que possuem afinidade (ou seja, que tendem a acoplar-se de alguma forma), a energia mais aparente para "grandes" distâncias é a potencial negativa - associada às forças de atração. Contudo, quando a aproximação é tão, tal que os átomos começam a misturar suas nuvens eletrônicas de forma significativa (começam a penetrar um no outro) as interações coulombianas elétron-elétron e núcleo positivo-núcleo positivo começam a ficarem importantes promovendo repulsão entre os átomos (esta é a componente com energia positiva na figura acima). A atração é percebida (e mais importantes) para valores "grandes" de r, enquanto que a repulsão passa a se sobrepor à atração para r muito pequenos.

⇒ Resulta em uma energia total (soma) apresentando um ponto de mínimo em r_0. Este ponto representa a distância de estabilidade, ou seja, a distância entre os átomos (entre os centros de seus núcleos). No caso do NaCl $r_0 \simeq 236$ pm.

A força de interação atômica é o negativo da derivada da energia potencial total.

$$F_{int} = -\frac{dU(r)}{dr}.$$

"Obviamente" a força que um agente externo deve aplicar para afastar os átomos deve ser contrária à força interatômica,

$$\Rightarrow F_{ext.} = -F_{int} = \frac{dU(r)}{dr}.$$

Os testes de tensão-deformação relatam as forças externas.

Como sabido (cálculo 1), a derivada de uma função $f(x)$ corresponde à $tag(\theta)$, sendo θ o ângulo de inclinação da reta tangente à $f(x)$ no ponto considerado. Assim, não fica difícil por observação direta da curva $U(r)$ que a força externa tem a forma abaixo

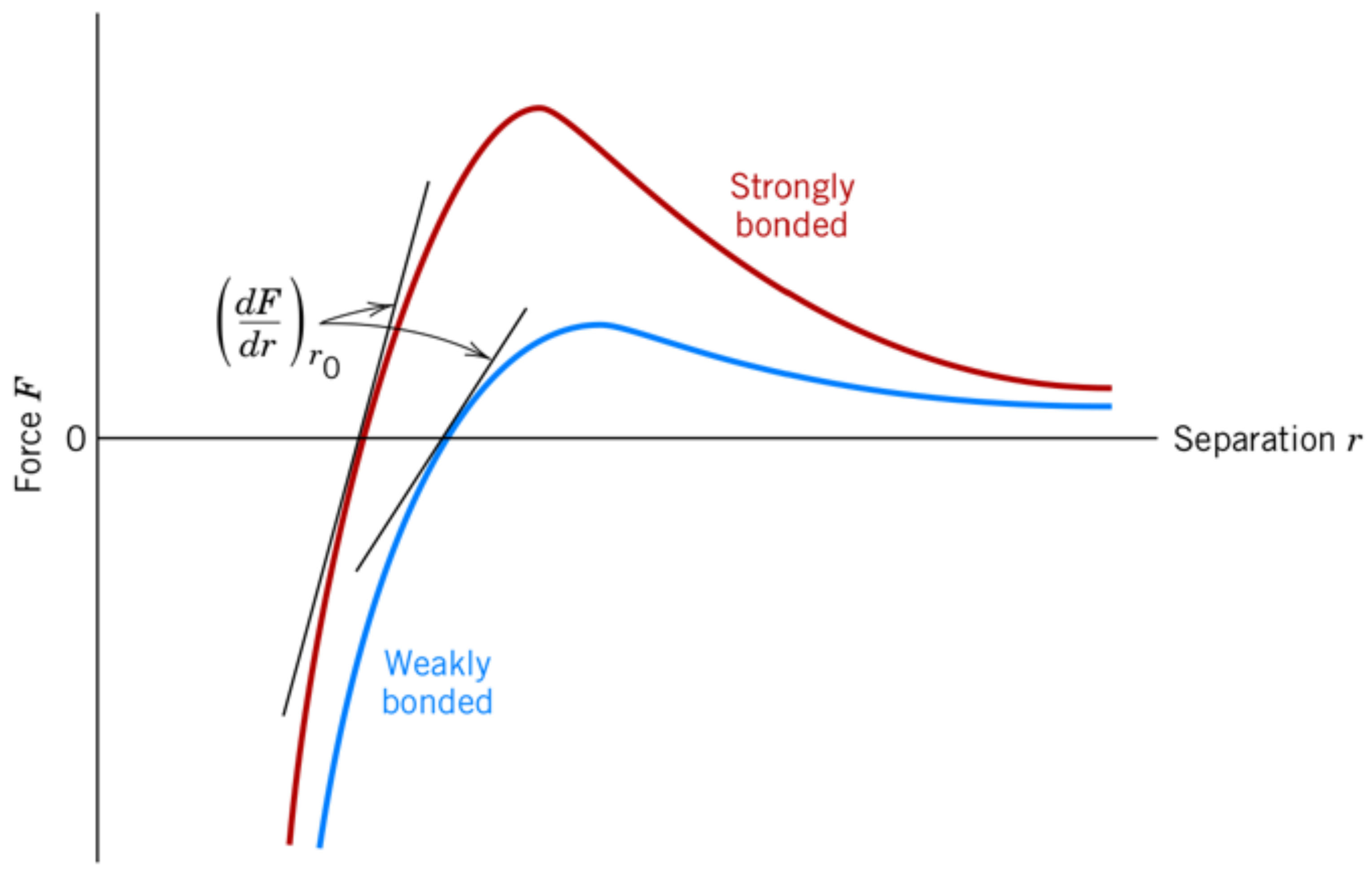


Fig William D Callister, Jr - 12ª Edição.

Note que a força fica positiva (força de tração) ao tentar-se afastar os átomo do equilíbrio (r_0). Contudo, a medida que a distância aumenta - digamos tendendo ao infinito - necessariamente a interação deve perder força. Isso só é possível se $F_{ext.}$ atingir um máximo em algum ponto intermediário na região $r_0 < r < \infty$.

Portanto, apartir do ponto de máximo F_{ext} para produzir novos $\Delta\varepsilon$ diminuem, ao contrário do que ocorre com uma mola (Considerando apenas o efeito mola).

Note que $E \propto \left(\frac{dF}{dr}\right)_{em\ r_0}$ **Obs:** Notar ≠ Memorizar

—||—

* * *

Problema: É intuitivo - experiência diária - que ao tracionarmos um material (pense em uma espuma como exemplo) sua dimensão não muda apenas na direção da força aplicada. Comumente ocorre decréscimo nas dimensões laterais (afinamento lateral quando $\sigma > 0$ e emlarguecimento quando $\sigma < 0$). Considere que exista

$\sigma > 0$ ↳ tração; $\sigma < 0$ ↳ Compressão

um limite dentro do qual o volume do espécime não varia. Usando a relação entre ε_x e ε_z, pelo coeficiente de Poisson e determine a magnitude da carga necessária para produzir uma alteração de $2{,}5 \times 10^{-3}$ mm no diâmetro de um bastão cilíndrico de latão com diâmetro de 10 mm

Conceitos: 1) Coeficiente de Poisson (ν).

Definição do coeficiente de Poisson ν.

Dentro do que foi posto acima - e ilustrado abaixo, define-se:

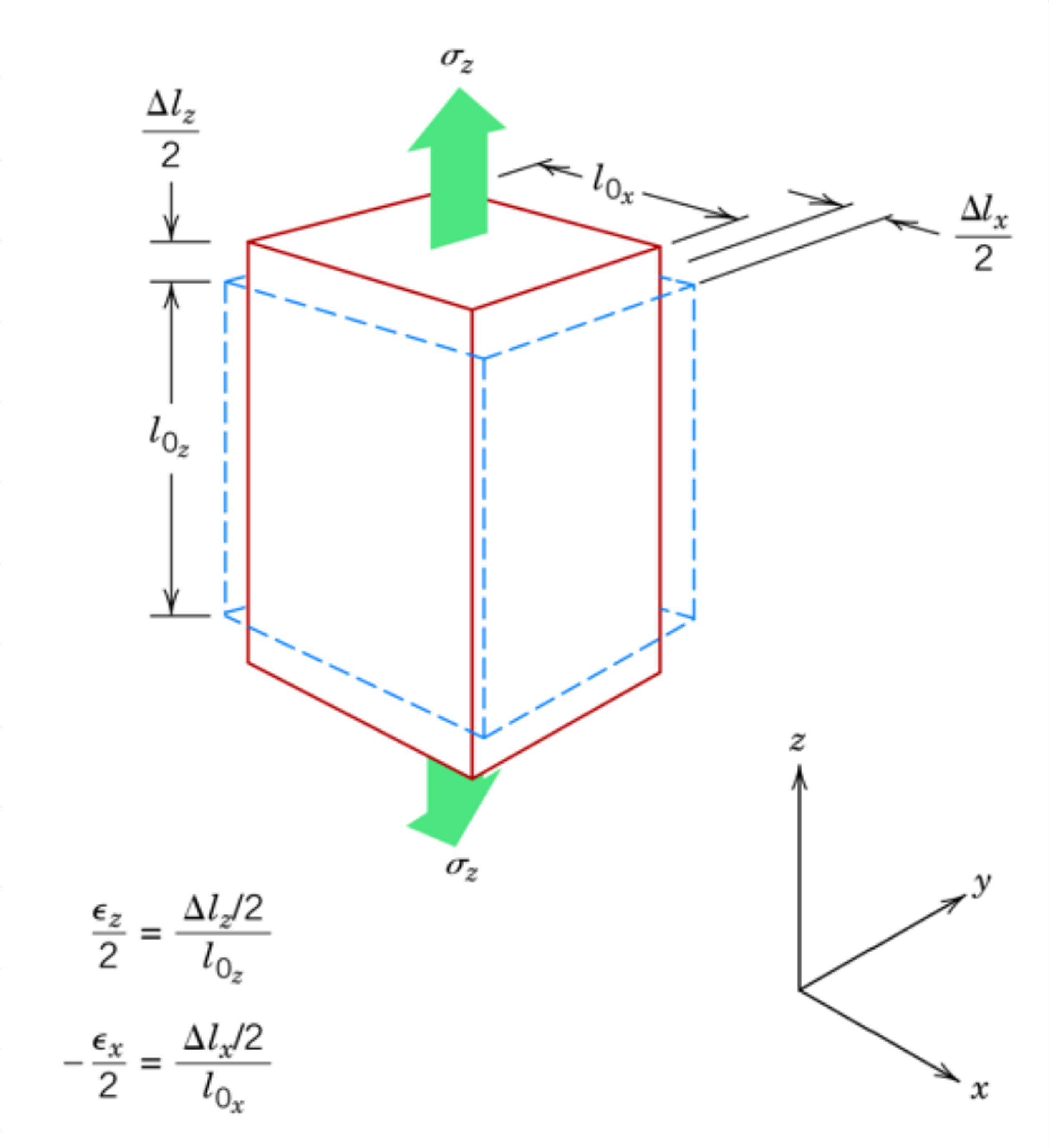


Fig William D Callister, Jr - 12ª Edição.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

Obs: Como os sinais de ε_z e ε_x são necessariamente inversos ⇒ o sinal negativo é inserido de forma a retornar sempre um $\nu > 0$.

Obs: ν coeficiente de Poisson varia dependendo do material. É mais uma característica do material. Na tabela da página 6 são mostrados alguns valores para alguns materiais.

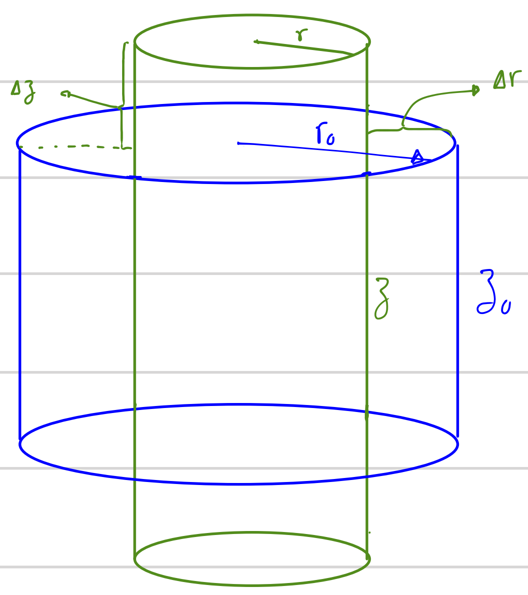
* Relação entre módulo de elasticidade, módulo de cisalhamento e coeficiente de Poisson.

$$E = 2G(1+\nu)$$

Informações adicionais: O valor máximo de ν para que não haja alteração no volume é de 0,50.
Para muitos metais e ligas o valor de ν varia entre 0,25 e 0,35.
Para materiais isotrópicos os módulos de cisalhamento e elasticidade se relacionam na forma $E = 2G(1+\nu)$.
O valor teórico de ν, para materiais isotrópicos, é $\nu = 1/4$.

Obs: Tente mostrar que $\nu \leq 0{,}5$ é necessário para que não haja variação do volume durante uma deformação por tensão.

Solução: Vamos considerar um espécime cilíndrico que é submetido a um processo de tensão-deformação, como ilustrado abaixo.



Como vimos $\quad \varepsilon_z = \dfrac{z - z_0}{z_0} \quad$ e $\quad \varepsilon_r = \dfrac{r - r_0}{r_0} \quad (*)$

$\Rightarrow$ Para que o volume não se altere é necessário que o acréscimo (ou decréscimo, no caso de compressão) de volume vertical seja compensado pela perda (ou ganho no caso de compressão) do volume "lateral".

$\Rightarrow V_0 = \pi r_0^2 \cdot z_0 \quad$ "volume antes"

$V_f = \pi r^2 z \quad$ "Volume final" ; queremos $V_0 = V_f$

$\Rightarrow \pi r_0^2 z_0 = \pi r^2 z \quad$ mas de $(*)$, acima, $z = z_0(1 + \varepsilon_z)$

e $\quad r = r_0(1 - \varepsilon_r)$

Obs: Visando intuição associada com a figura acima – que simula um processo de tração – vamos assumir ε_z e ε_r positivos; e vamos utilizar o sinal negativo em ε_r. No final sabemos que em um processo de tração $\rightarrow \varepsilon_z > 0$ e $\varepsilon_r < 0$. (aqui queremos apenas obter o módulo $\varepsilon_r/\varepsilon_z$ por $V = cte$).

Segue: $\cancel{\pi r_0^2 z_0} = \cancel{\pi r_0^2}(1 - \varepsilon_r)^2 \cancel{z_0}(1 + \varepsilon_z)$

$\Rightarrow (1 - \varepsilon_r)^2 \cdot (1 + \varepsilon_z) = 1$

$\Rightarrow (1 - \varepsilon_r)^2 + (1 - \varepsilon_r)^2 \cdot \varepsilon_z = 1$

$$\varepsilon_z = \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + 2\varepsilon_r - \varepsilon_r^2}{(1 - \varepsilon_r)^2}$$

$$\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_r} = \frac{2 - \varepsilon_r}{(1 - \varepsilon_r)^2}$$

Resulta que $\dfrac{\varepsilon_r}{\varepsilon_3} = \dfrac{(1-\varepsilon_r)^2}{(2-\varepsilon_r)}$

Como usamos os módulos de ε_r e ε_3

$\Rightarrow \nu = \dfrac{(1-\varepsilon_r)^2}{2-\varepsilon_r}$

"Necessariamente $\varepsilon_r < 1$"

Afinal $\Delta r = \varepsilon r_0 \Rightarrow$ se $\varepsilon = 1$ o material desaparece

pois $r - r_0 = r_0$

$r =$ zero ... Fisicamente impossível.

Note que $\dfrac{d\nu}{d\varepsilon_r} = \dfrac{(2-\varepsilon_r)\,2\,(1-\varepsilon_r)(-1) - (1-\varepsilon_r)^2(-1)}{(2-\varepsilon_r)^2} = \dfrac{-2\,(2-\varepsilon_r)(1-\varepsilon_r) + (1-\varepsilon_r)^2}{(2-\varepsilon_r)^2}$

★ Claramente percebe-se que $\dfrac{d\nu}{d\varepsilon_r} = 0$ em $\varepsilon_r = 1$

E se $0 < \varepsilon_r < 1 \Rightarrow \dfrac{d\nu}{d\varepsilon_r} < 0$

"faça $\varepsilon_r \longrightarrow$ zero e perceba que

$\nu'(\varepsilon) \longrightarrow \dfrac{-4+1}{2} \simeq -\dfrac{3}{2}$, negativo"

Assim $\nu = \dfrac{(1-\varepsilon_r)^2}{(2-\varepsilon_r)}$ é $\approx 0{,}5$ se $\varepsilon_r \longrightarrow 0$, e decresce até zero,

tendendo a zero quando $\varepsilon_r \longrightarrow 1$.

Portanto $\underline{0 < \nu \leqslant 0{,}5}$

* * *

Voltando ao problema que originol as discussões acima:

Problema: É intuitivo - experiência diária - que ao tracionarmos um material (*pense em uma espuma como exemplo*) sua dimensão não muda apenas na direção da força aplicada. Comumente ocorre decréscimo nas dimensões laterais (*afinamento lateral quando* $\underbrace{\sigma > 0}_{\text{tração}}$ *e enlarguecimento quando* $\underbrace{\sigma < 0}_{\text{Compressão}}$). Considere que exista um limite dentro do qual o volume do espécime não varia. Use a relação entre ε_x e ε_3, pelo coeficiente de Poisson, e determine a magnitude da carga necessária para produzir uma alteração de $2{,}5 \times 10^{-3}$ mm no diâmetro de um bastão cilíndrico de latão com diâmetro de 10 mm

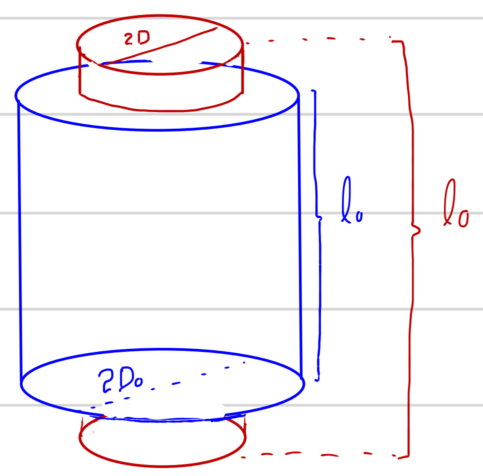
SOLUÇÃO: Bastão cilíndrico de latão: $\nu = 0,34$

Carga necessária para produzir $\Delta D = 2,5 \times 10^{-3}\,mm$ (D = diâmetro).

Em um cilindro com $D_0 = 10mm$

Módulo de elasticidade do latão: $E = 97\,GPa$

Ferramentas: $\nu = -\dfrac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}$



$$\sigma_z = E\,\varepsilon_z \qquad \varepsilon_z = -\frac{\varepsilon_d}{\nu}$$

$$|\sigma_z| = \frac{E\,\varepsilon_d}{\nu}$$

quero um ε_r que produza ΔD -

$$\Rightarrow \Delta D = \varepsilon_d \cdot D_0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_d = \frac{\Delta D}{D_0}$$

$$\Rightarrow |\sigma_z| = \frac{E}{\nu}\,\frac{\Delta D}{D_0}$$

Como $\sigma_z = \dfrac{F}{A_0} = \dfrac{F}{\pi\left(\frac{D_0}{2}\right)^2}$

$$\Rightarrow \frac{F}{\pi \frac{D_0^2}{4}} = \frac{E}{\nu}\,\frac{\Delta D}{D_0}$$

$$\Rightarrow F = \frac{\pi}{4} \cdot D_0 \cdot \frac{E}{\nu} \cdot \Delta D$$

$$F = \frac{\pi}{4}\, 10 \times 10^{-3} \cdot \frac{97 \times 10^{6}}{0,34} \cdot 2,5 \times 10^{-3}\ mm \cdot mm \cdot \frac{N}{\cancel{mm^2}}$$

$$\boxed{F = 5,6 \times 10^{3}\ N}$$

* * *

Problema: Um bastão cilíndrico feito de Cobre (E = 110 GPa) que possui uma temsão limite de escoamento de 240 MPa deve ser submetido a uma carga de 6660 N. Se o comprimento do bastão é de 380 mm, qual deve ser o seu diâmetro para permitir um alongamento de 0,50 mm ?

Solução: Este problema insera vários movos conceitos:

1) Temsão limite de escoamento
2) Tambeim deixa claro que existe uma relação entre diâmetro inicial (provavelmente área inicia) e o termo escoamento.

Emtendemdo os conceitos:

1) Escoamento e limite de escoamento:

Sem tensão externa, as interações interatômicas estão em uma configuração de mínima energia. Para pequenos deslocamentos ε em torno do ponto de equilíbrio $\Rightarrow$ a relação entre σ e ε é aproximadamente linear (lei de Hook, $\sigma = E\varepsilon$). A medida que maiores deformações acontecem resulta um aumento na probabilidade de desacoplamentos pontuais, tal que átomos (com uma dada probabilidade proporcional a temsão e a temperatura) começam a se posicionarem em pontos de estabilidades em outros locais próximos (denominados pontos metaestáveis). Quando este processo começa a acontecer significativamente o material perde a capacidade de voltar à sua configuração inicial - ou seja - deixa de apresentar um comportamento elástico e entra no regima plástico. Este processo está representado na Fig. abaixo.

(*a*) Typical stress–strain behavior for a metal showing elastic and plastic deformations, the proportional limit *P*, and the yield strength σ_y, as determined using the 0.002 strain offset method. (*b*) Representative stress–strain behavior found for some steels demonstrating the yield point phenomenon.

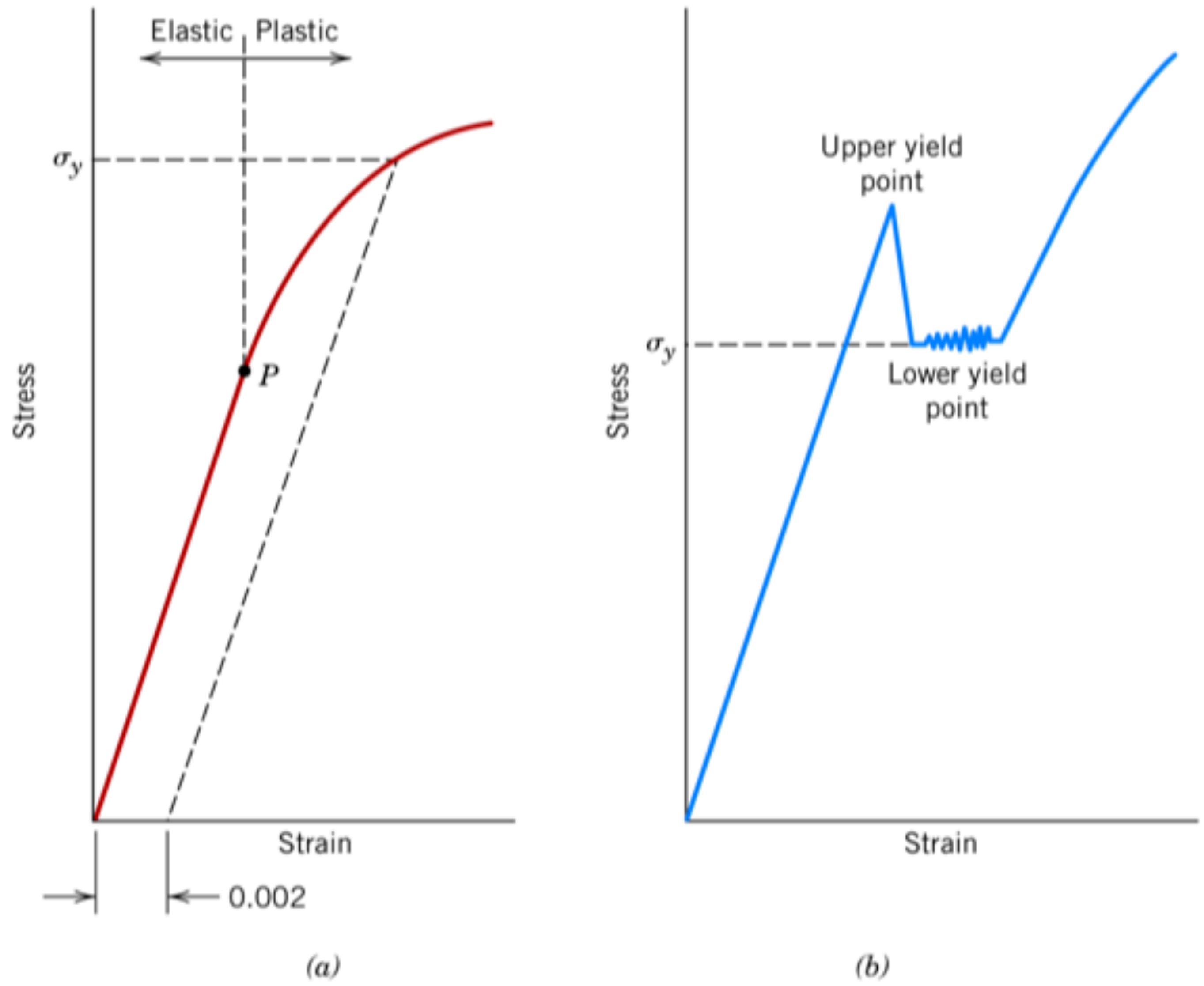
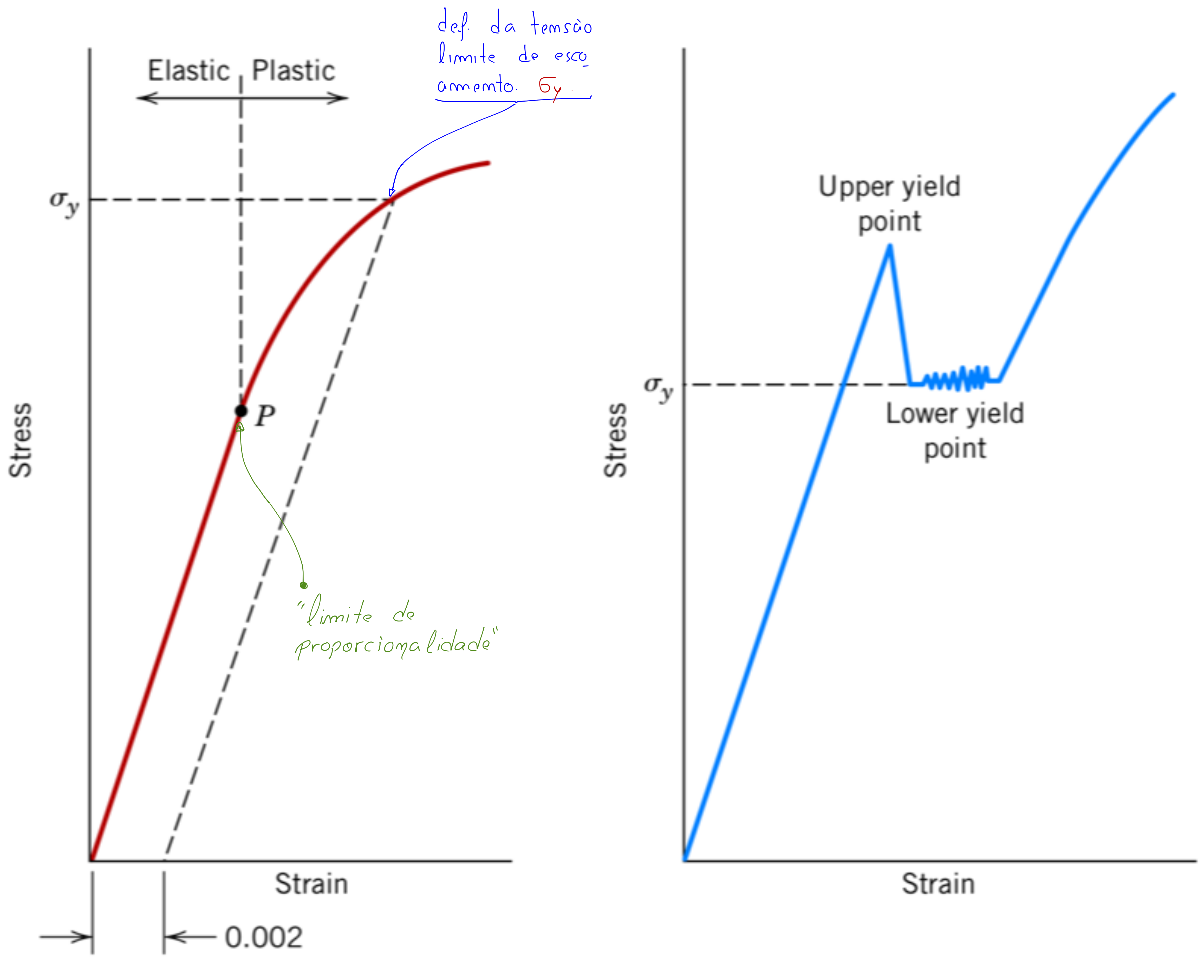


Fig William D Callister, Jr - 12ª Edição.

Análise e definições



(a) (b)

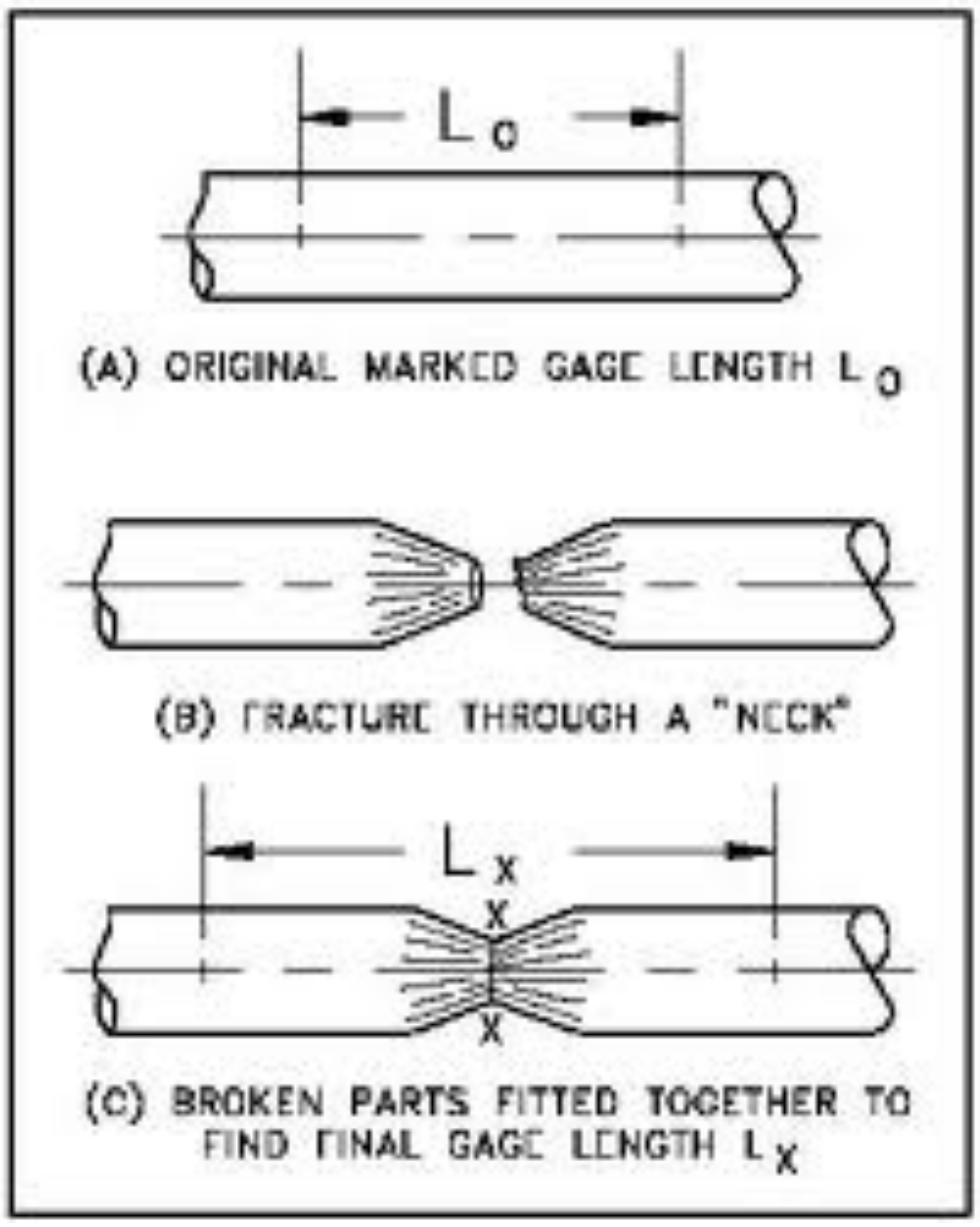
Fig William D Callister, Jr - 12ª Edição.

(a) σ_y: O ponto que define o fim da linearidade não bem definido em alguns materiais. Neste caso se fine-se como mostrado na Fig. acima. - Método da pré-deformação.

Obs: Existem materiais que não apresentam deformação plástica linear. Nestes casos não é possível traçar a parelela. Nestes casos define-se $\sigma_{esc.}$ como a tensão necessária para produzir $\epsilon = 0{,}005$.

(b) Para os materiais que apresentam o comportamento mostrado em (b) - ler o gráfico - $\Rightarrow \sigma_y$ é definido no valor média da região de oscilação em torno de um valor constante.

Ductibilidade.



https://encrypted-tbn1.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRKCLhaoiqJx-WXknoxbpTyF8XtYnBdGdubN940_6Y7A1IfkUPa1Q

$$\%\mathrm{EL} = \left(\frac{l_f - l_0}{l_0}\right) \times 100$$

$$\%\mathrm{RA} = \left(\frac{A_0 - A_f}{A_0}\right) \times 100$$

Metal Alloy	*Yield Strength, MPa (ksi)*	*Tensile Strength, MPa (ksi)*	*Ductility, %EL [in 50 mm (2 in.)]*
Aluminum	35 (5)	90 (13)	40
Copper	69 (10)	200 (29)	45
Brass (70Cu–30Zn)	75 (11)	300 (44)	68
Iron	130 (19)	262 (38)	45
Nickel	138 (20)	480 (70)	40
Steel (1020)	180 (26)	380 (55)	25
Titanium	450 (65)	520 (75)	25
Molybdenum	565 (82)	655 (95)	35

Resilience

Resilience is the capacity of a material to absorb energy when it is deformed elastically and then, upon unloading, to have this energy recovered. The associated property is the *modulus of resilience*, U_r, which is the strain energy per unit volume required to stress a material from an unloaded state up to the point of yielding.

Computationally, the modulus of resilience for a specimen subjected to a uniaxial tension test is just the area under the engineering stress–strain curve taken to yielding (Figure 6.15), or

$$U_r = \int_0^{\epsilon_y} \sigma\, d\epsilon \qquad (6.13a)$$

Assuming a linear elastic region,

ar

$$U_r = \tfrac{1}{2}\sigma_y \epsilon_y \qquad (6.13b)$$

in which ϵ_y is the strain at yielding.

$$U_r = \frac{1}{2}\sigma_y \epsilon_y = \frac{1}{2}\sigma_y\left(\frac{\sigma_y}{E}\right) = \frac{\sigma_y^2}{2E}$$

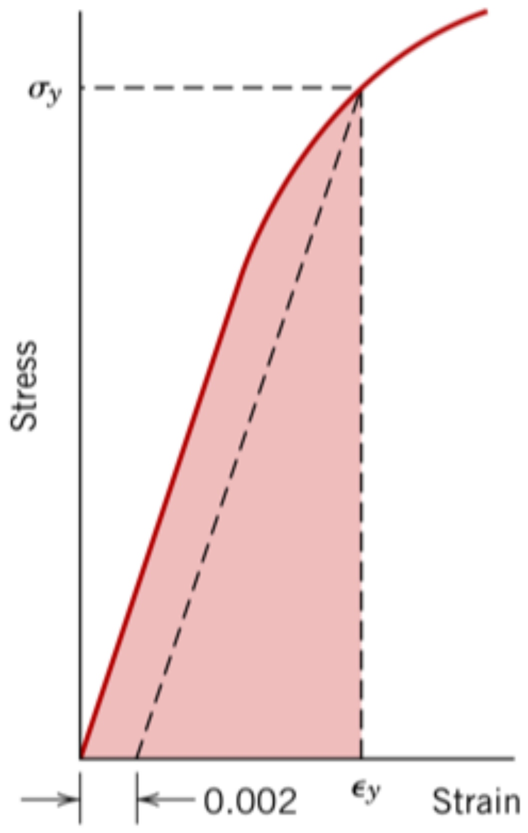


Figure 6.15 Schematic representation showing how modulus of resilience (corresponding to the shaded area) is determined from the tensile stress–strain behavior of a material.

Fig William D Callister, Jr - 12ª Edição.

Temacidade Absorção de emergia até a fratura.

Obs: A geometria e a forma de aplicação da carga são importamtes.

Forma estática, Ex: $U_{ten} = \int_0^{\epsilon_{rup}} \sigma \, d\varepsilon$

* Tensão Verdadeira e Deformação Verdadeira.

Pelo teste experimental de tensão-deformação encontramos o comportamento

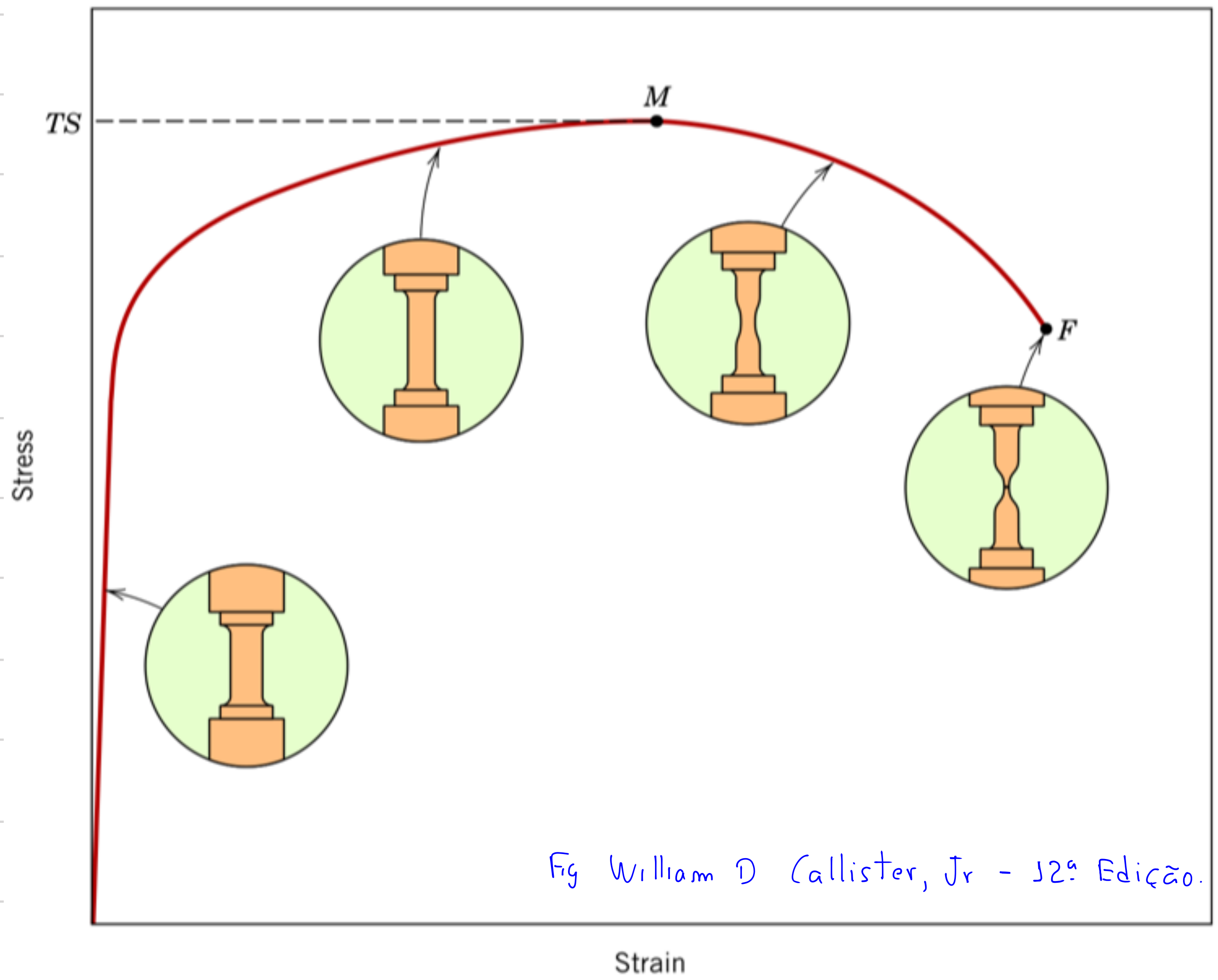


Fig William D Callister, Jr - 12ª Edição.

Se direcionarmos atenção apenas par a curva $\sigma(\varepsilon)$ somos levados a "crer" que a resistência do material diminui a partir do ponto M, pois maiores deformações são alcançadas com cada vez menores tensões. Este fato aparentemente não corresponde a uma diminuição na resistência pontual do material - Trata-se do efeito de empescoçamento. De fato, sabemos que $\sigma \propto A$. O gráfico acima considera que a tensão σ é dada por

$$\sigma = \frac{F_\perp}{A_0}.$$

Note, no entanto, que mantendo a mesma força que faz resultar na tensão do ponto de escoamento ocorre que o efeito do escoamento faz diminuir a área transversal na região do empescoçamento. Assim, tem-se que na região do empescoçamento, mantendo $F_\perp \equiv F_M =$ constante, o escoamento faz diminuir a área A com o tempo, tal que

$$\sigma = \frac{F_M}{A}$$, aumenta proporcionalmente ao decréscimo de A.

No gráfico acima considera-se que a área é sempre a inicial, por isso a ocorrência do ponto de máximo. Se, no entanto, o valor de A fosse corrigido a cada instante teríamos a tensão verdadeira na região de empescoçamento e um ponto de máximo não existiria.

Deta forma a tensão verdadeira deve ser definida como função da área instantânea

$$\sigma_v = \frac{F}{A_i}.$$

Deformação verdadeira ε_v.

haviamos definido a deformação percentual $\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$.

Algumas vezes é conveniente apresentar a deformação como a deformação verdadeira definida por

$$\varepsilon_v = \ln\left(\frac{l_i}{l_0}\right).$$

Obs: Qual o motivo de se trabalhar com essa definição em vez da definição percentual (percentual é mais comum) O que vem a ser ε_v. ?

⇒ Na representação de deformação percentual $\left(\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}\right)$, a deformação é referenciada sempre ao valor do comprimento inicial. Contudo, em alguns casos podemos estar interessados em o que vai acontecer se impormos uma deformação adicional em um material previamente deformado. Neste caso vamos considerar uma deformação infinitesimal instantânea

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l}$$

"definida como $\lim_{l \to l_i} \frac{l - l_i}{l_i} = \frac{dl}{l}$"

Assim define-se

$$\varepsilon_v = \int d\varepsilon = \int_{l_0}^{l} \frac{dl'}{l'} = \ln(l) - \ln(l_0)$$

$$\varepsilon_v = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right).$$

"Reiterando que ε_v assim definido representa a soma de deformações percentuais subsequentes".

Ex: $\varepsilon_1 = \ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right)$ e $\varepsilon_2 = \ln\left(\frac{l_2}{l_1}\right)$ "subsequentes"

$$\varepsilon_{total} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right) + \ln\left(\frac{l_2}{l_1}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{l_1}}{l_0} \cdot \frac{l_2}{\cancel{l_1}}\right)$$

$$\varepsilon_{total} = \ln\left(\frac{l_2}{l_0}\right)$$

Para o limite com volume constante, $A_0 l_0 = A l$ $\Rightarrow$ σ e σ_v relacionam-se como segue.

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad e \quad \sigma_v = \frac{F}{A_i}$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma A_0}{A_i} \quad , \text{ mas } \quad \frac{A_0}{A_i} = \frac{l}{l_0} \qquad \text{"V = cte"}$$

$$\sigma_v = \sigma \cdot \frac{l}{l_0} \qquad \text{mas} \quad \frac{l - l_0}{l_0} = \varepsilon \Rightarrow l = \varepsilon l_0 + l_0$$

$$\Rightarrow \frac{l}{l_0} = \varepsilon + 1$$

$$\Rightarrow \sigma_v = \sigma(1 + \varepsilon).$$

—"—

Também as deformações se relacionam como.

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (1) \qquad \varepsilon_v = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (2)$$

de (1) $\Rightarrow$ $l = \varepsilon l_0 + l_0$ $\Rightarrow$ $\frac{l}{l_0} = \varepsilon + 1$, isso em (2)

$$\Rightarrow \varepsilon_v = \ln(1 + \varepsilon).$$

—"—

σ_v e ε_v se relacionam por uma proporcionalidade. Até a região plástica (fora já da linearidade) σ_v e ε_v se relaciona aproximadamente por

$$\sigma_v = K \varepsilon_v^{n}. \qquad \text{"não linear"}$$

Sendo <u>K</u> e <u>n</u> constantes características do material

Obs: O restante deste capítulo não será abordado neste curso básico.